第3篇 增长理论：超长期中的经济

第8章 经济增长I: 资本积累与人口增长

第9章 经济增长II: 技术、经验和政策

（复习）

暨南大学经济学院　蒋璇

gabijiang@icloud.com

“超长期中的经济”

❑第2篇：长期中的经济 V.S. 第3篇：超长期中的经济

- “长期” ：并非简单地指物理时间的长短；而是弹性价格的长期
- “短期” ：价格黏性的短期（第4篇）
- “超长期” ：在长期的基础上，加入了经济增长的因素
- 接下来我们就把第八章和第九章的知识点串讲一遍

资本积累

- **第二篇只有生产**，没有资本积累
- 因为只有一个时间截面，只看到了某一期的生产与分配
- 一旦引入时间这一维度，就有了生产→资本积累

- 索洛模型
- AK模型
- 两部门模型

8.1 索罗模型：资本积累（产品的供给与生产函数）

- 产品供给与生产函数：

$$Y = F(K, L)$$

- **假设1：生产函数为规模收益不变。**

$$zY = F(zK, zL), \forall z > 0$$

- 设$z = \frac{1}{L}$, 可得

$$\frac{Y}{L} = F(\frac{K}{L}, 1)$$

- 于是，人均产出可以表示为人均资本的函数

$$y = f(k)$$

- 到目前为止，与第2篇中介绍的生产函数的唯一区别就是引入了人均的概念，将生产函数等比例缩小到了人均生产函数

8.1 索罗模型：资本积累（产品的供给与生产函数）

- **假设2：资本的边际产出大于零，**

$$MPK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial y}{\partial k} = f'(k) > 0$$

- 且资本的边际产出递减

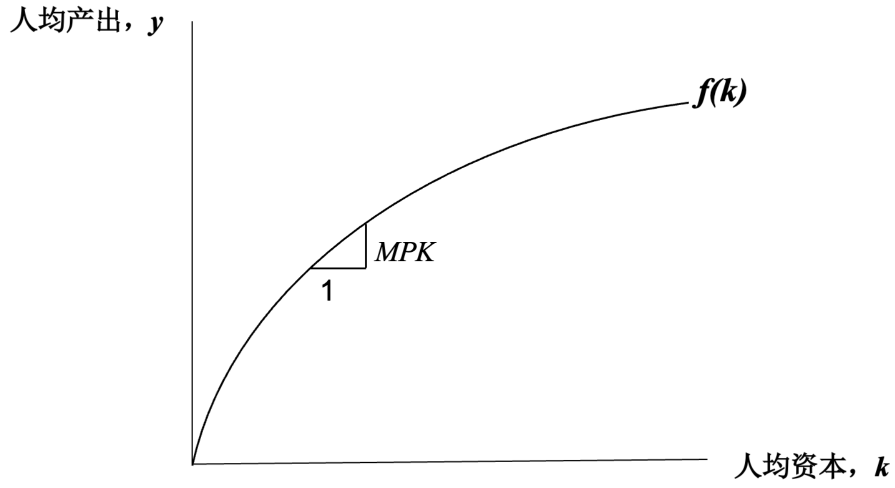
$$\frac{\partial MPK}{\partial k} = f''(k) < 0$$

- 资本存量的变化：

$$\Delta k = sy - \delta k$$

- 资本存量的变化率：

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{sy - \delta k}{k} = \frac{sy}{k} - \delta$$



8.1 索罗模型：资本积累（产品的需求与消费函数）

- 产品需求可用于消费和投资：　$y = c + i$

- 注：这是每个工人平均的形式，且忽略了政府和外国部门。

- **假设3：储蓄率s（$0<s<1$），外生给定**

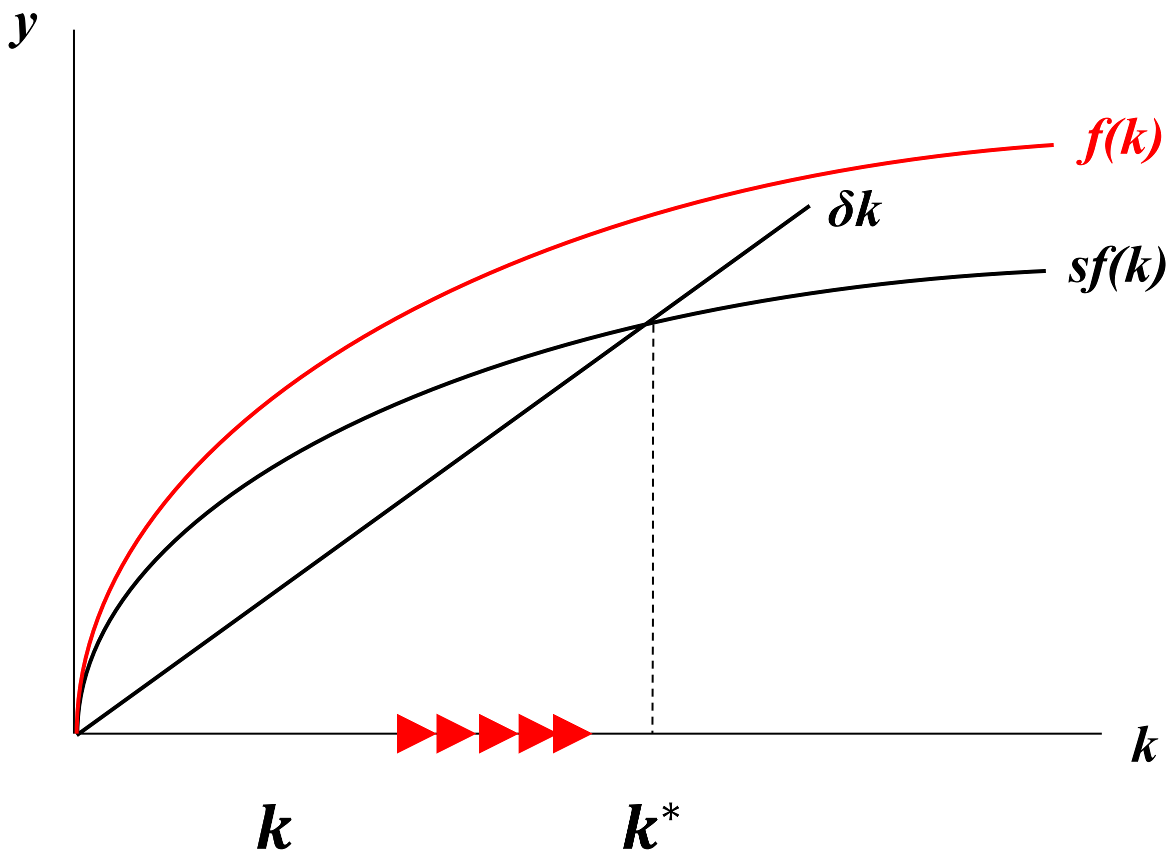
$$c = (1 - s)\,y$$

- 投资等于储蓄

$$i = sy \quad \text{或} \quad i = sf(k)$$

- 到目前为止，国民收入核算恒等式也与第二篇中介绍的并无二致，只是等比缩小到了人均产出，人均消费，和人均投资形式。

8.1 资本积累：如何积累？



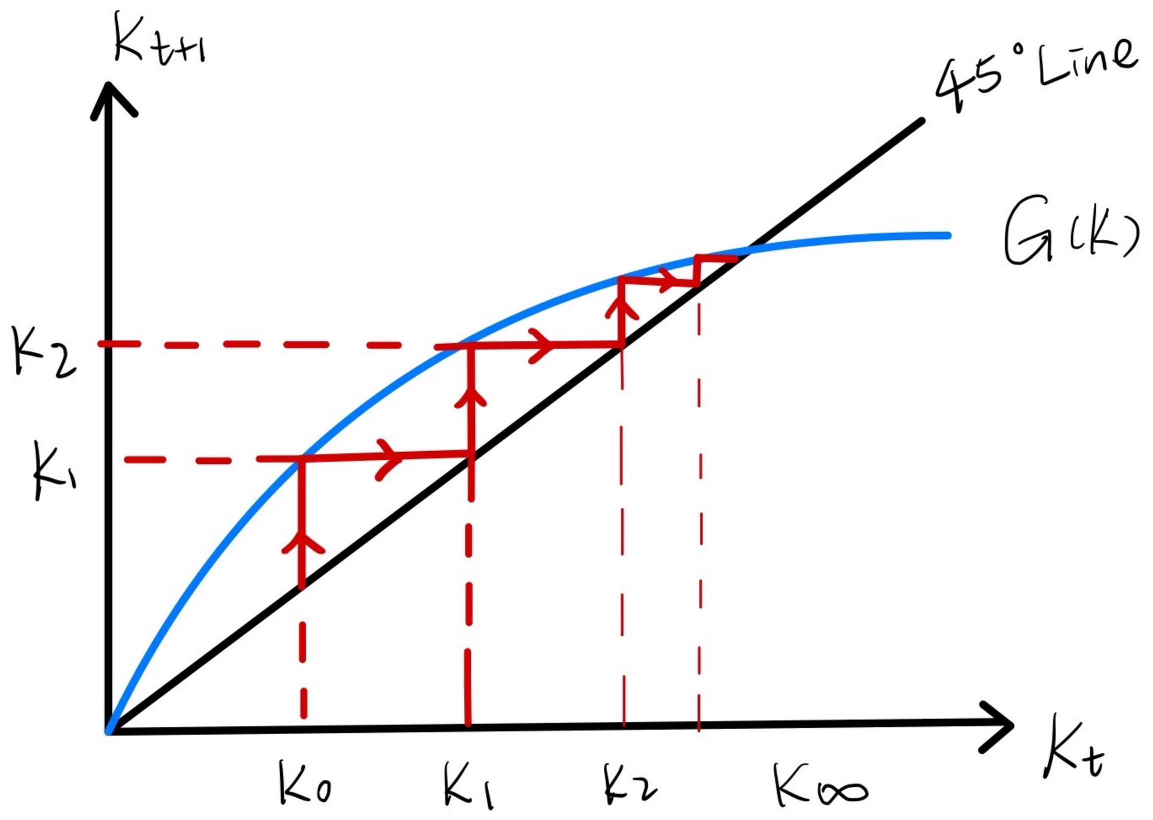
第1种图示形式：生产函数曲线，投资曲线，折旧曲线

资本存量为k，产出为$f(k)$，资本增量（即投资）为$sf(k)$，资本减量为δk

8.1 资本积累：如何积累？

为何有45°斜率？
稳态下：
$\Delta k = 0$
$k_t = k_{t+1}$

转移动态
（Transitional Dynamics）



第2种图示形式：资本存量的变化通道（直接展示$\boldsymbol{k}$如何随时间变化）

$k_{t+1} = \mathrm{G}(k_t)$

$\mathrm{G}(k_t) = k_t + [\mathrm{s}f(k_t) - \delta k_t]$

8.1 资本积累：稳定状态

- 接上页：

$$k_{t+1} = k_t + [sf(k_t) - \delta k_t]$$
$$\Delta k = sf(k_t) - \delta k_t$$

- 稳定状态：

$$\Delta k = sf(k_t) - \delta k_t = 0$$

- 存在一个单一的资本存量(k^*)使得投资等于折旧

$$\Delta k = sf(k^*) - \delta k^* = 0$$

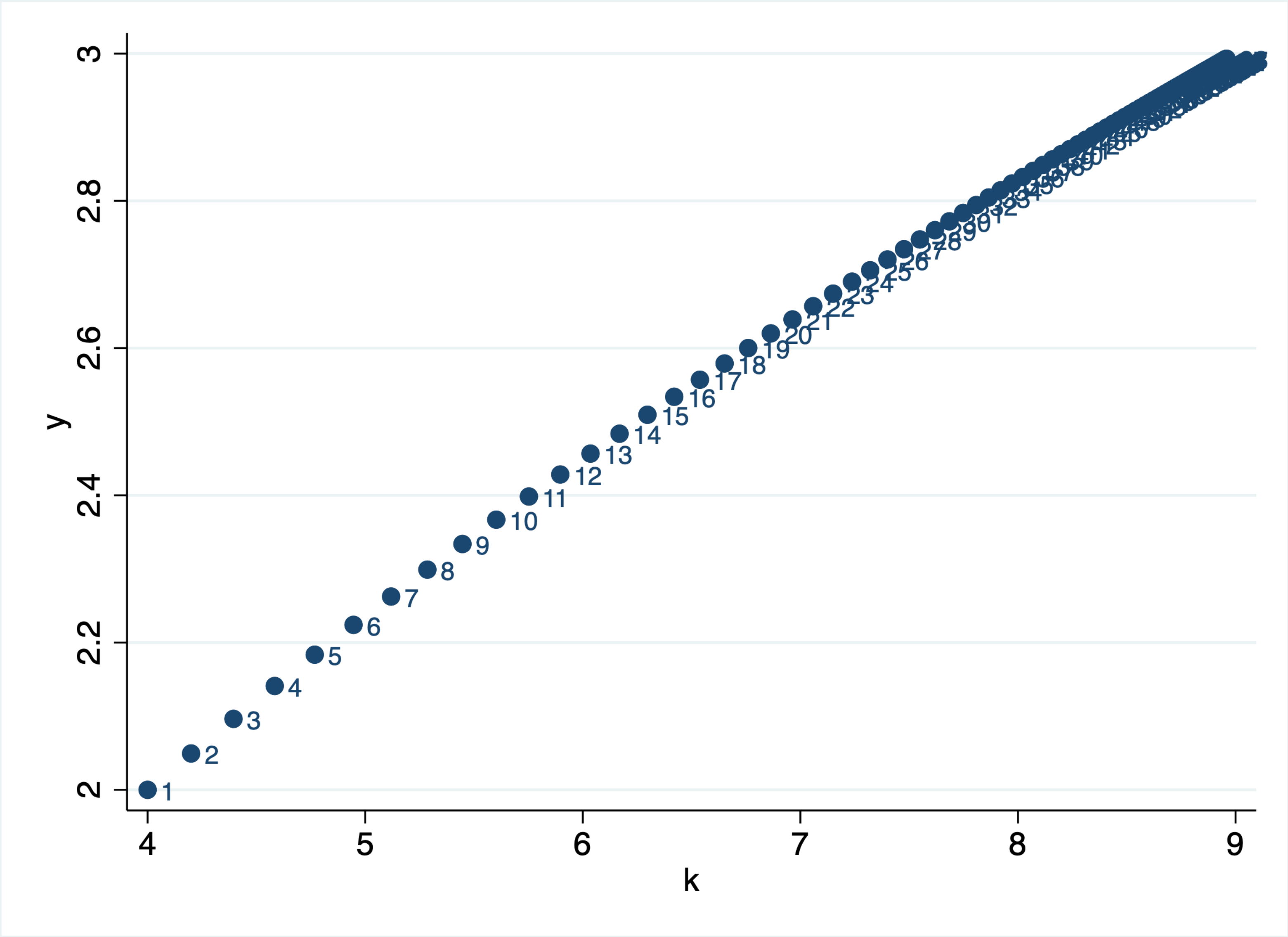
（课本）趋近稳态：一个数字例子

- 假设：$y = \sqrt{k}$; $s = 0.3$; $\delta = 0.1$; 初始$k = 4.0$
- 分析解：

$$sf(k^*) - \delta k^* = 0$$
$$0.3\times\sqrt{k^*} - 0.1\times k^* = 0$$
$$k^* = 9$$

- 同时，表8-2列举出了所有初始值→稳态值的过程（数值解）

表8-2数据可视化：每一个点都是一个时间点



8.2 资本的黄金律水平

- 使消费最大化的稳态资本存量k^*被称为**资本的黄金律水平。**

$$c^* = f(k^*) - sf(k^*)$$
$$sf(k^*) = \delta k^*$$

目标方程：

$$c^* = f(k^*) - \delta k^*$$

FOC:

$$\frac{\partial c^*}{\partial k} = f'(k^*) - \delta = 0$$
$$MPK = \delta$$

（课本）找到黄金律稳态：一个数字例子

- 假设：$y = \sqrt{k}$; $\delta = 0.1$
- 在稳态时有：

$$sf(k^*) = \delta k$$
$$\frac{k^*}{\sqrt{k^*}} = \frac{s}{0.1}$$

$$k^* = 100s^2$$

- 分析解：代回$MPK = \delta$

$$\frac{1}{2\sqrt{k^*}} = 0.1 \rightarrow k^* = 25$$

- 同时，表8-3列举出了s=0.0→s=1.0 的稳态下各个量的值（由此可找到数值解）

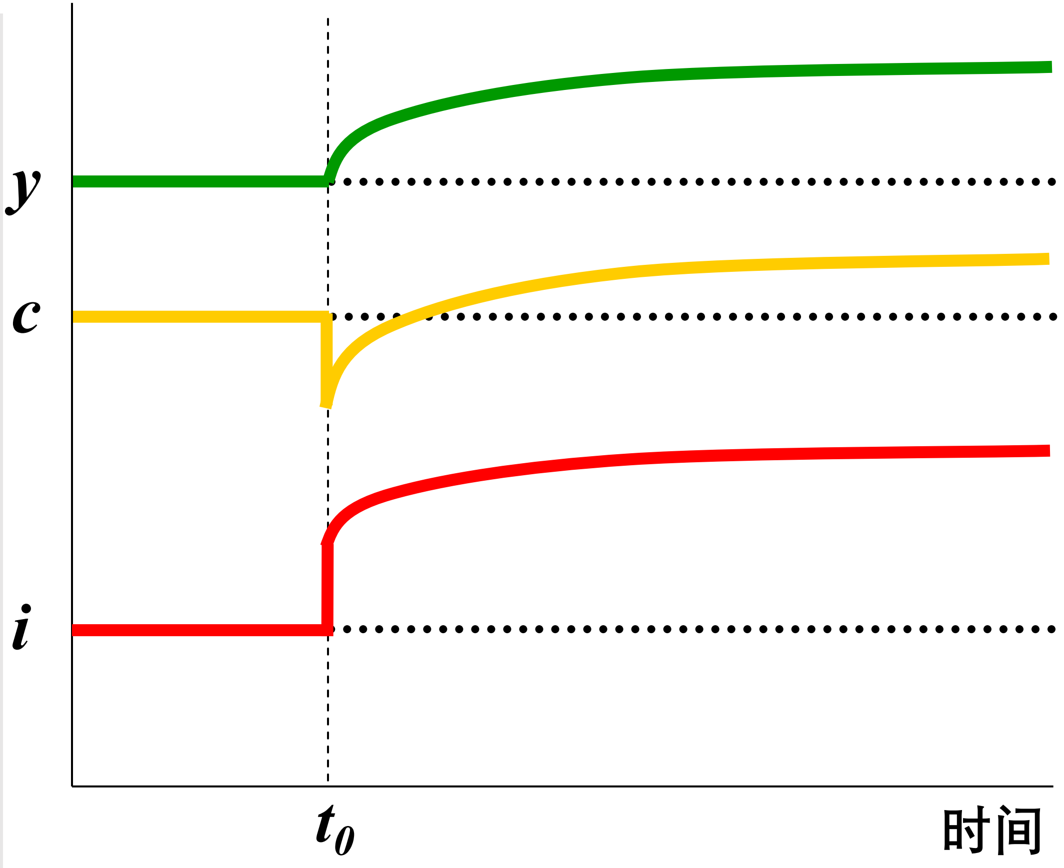
向黄金律稳态的过渡

- 以资本过少为起点

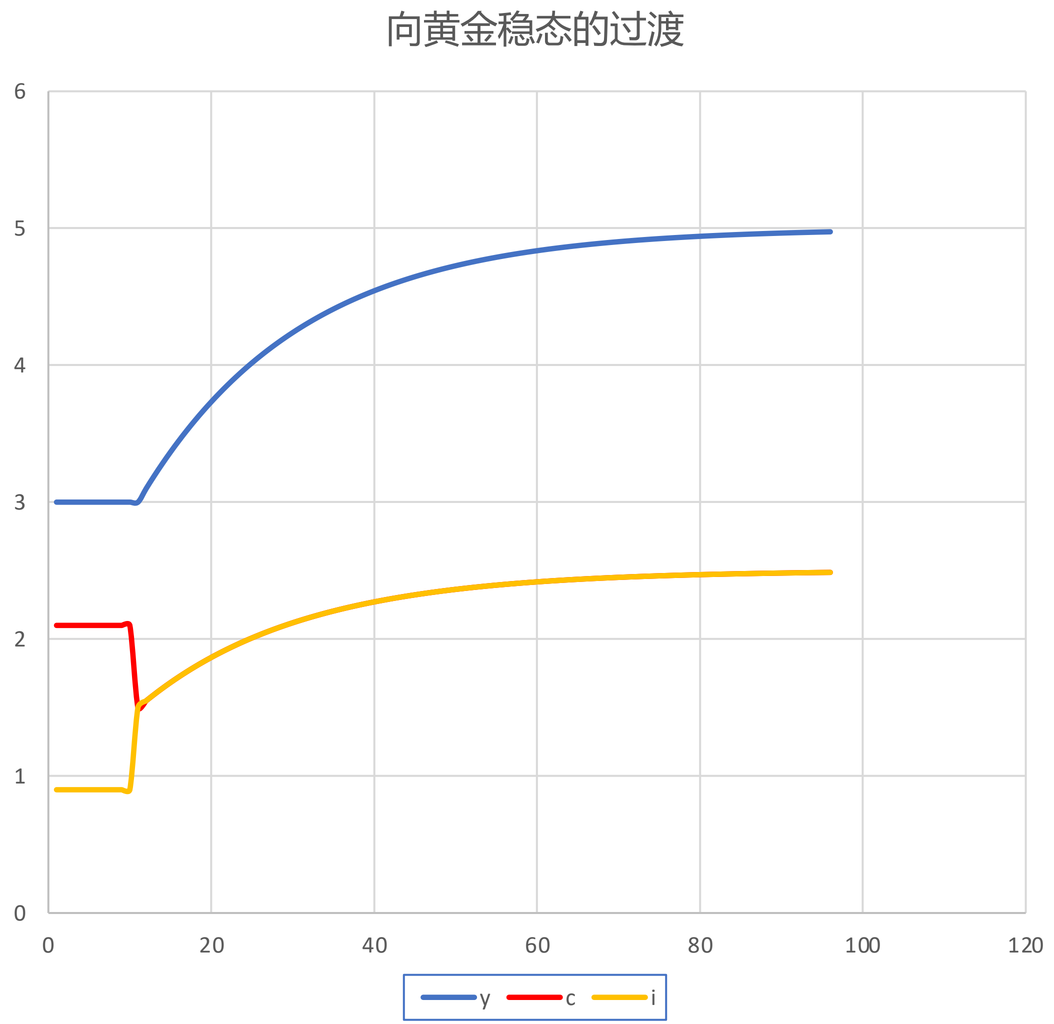
如果 $\boldsymbol{k}^* < \boldsymbol{k}^*_{gold}$

要提高稳态消费*c*
就要提高储蓄率*s*.

子孙后代都可以拥有较高的消费，但现在这些人的消费会下降.



向黄金律稳态的过渡 利用表8-2&表8-3数据画图（参见Excel）



注：因为$s = 0.5$, c曲线和i曲线后半部分重合了

资本积累本身并不能解释持续的经济增长

目前的三种索罗模型中的稳定状态下增长率		
	总产出	人均产出
无人口、无技术增长	0	0
有人口增长、无技术增长	n	0
有人口增长、有技术增长	$n+g$	g

总产出的增长依赖于人口增长和（或）技术增长

推导：有人口增长的人均资本存量的变动

- 有无人口、技术增长都有：$\frac{dK}{dt} = \Delta K = sF(K) - \delta K$
- 人口增长条件下，有$(\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}})/L = n$
- 求Δk：

$$
\begin{aligned}
\Delta k &= \frac{dk}{dt} \\
&= \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dt} \\
&= \frac{1}{L}\frac{dK}{dt} - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}^2}\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}} \\
&= \frac{sF(K) - \delta K}{L} - \frac{K}{L}n \\
&= sf(k) - \delta k - kn \\
&= sf(k) - (\delta + n)k
\end{aligned}
$$

- **思考**：如何推导有技术进步率，g，的人均资本存量的变动呢？
- 不难发现，把上式中的劳动力替换成$L' = EL$，有：

$$(\frac{\mathrm{dL'}}{\mathrm{dt}})/L' = (n+g)$$

- 也就是，在有技术进步率的稳态条件为：

$$\Delta k = sf(k) - (\delta + n + g)k = 0$$

练习题：

假设两国的人均生产函数都为$y = k^{0.5}$，都没有人口增长和技术进步，两国的折旧都是资本的5%，A国的储蓄率为10%，B国的储蓄率为20%。如果A国以4的资本劳动比开始，B国以2的资本劳动比开始，从长期来看（）

- A. A国和B国都将会有4的资本劳动比
- B. A国和B国都将会有16的资本劳动比
- C. A国的资本劳动比会是4，而B国的会是16
- D. A国的资本劳动比会是16，而B国的会是4

答案：

C

练习题：

假定索罗增长模型描述的一个经济有以下生产函数：

$$Y = K^{0.5}(EL)^{0.5}$$

- A. 对于这个经济，$f(k)$的形式是什么？
- B. 解出稳态y值，把它表示成$s, n, g,$和δ的函数。
- C. 两个邻国的经济都有如上的生产函数，但它们的参数值不一样。A国的储蓄为28%，人口增长率为1%。B的储蓄率为10%，人口增长率为4%。在这两国中，都有$g = 0.02, \delta = 0.04$。找出两国稳态的y值。

(1) $f(k) = k^{\frac{1}{2}}$

(2)$sy^* = (\delta + n + g)k^*$
$sy^* = (\delta + n + g)y^{*2}$
$y^* = s/(\delta + n + g)$

(3)

A: $y^* = 4$

B: $y^* = 1$

练习题：

画一幅图说明有人口增长的索罗增长模型的稳态，清楚地标注横轴、纵轴、各条曲线和直线。利用该图形找出一下各种外生变动会引起稳态人均资本和人均收入发生什么变动。

- a. 消费者偏好的某种变化提高了储蓄率
- b. 天气模式的某种变化提高了折旧率
- c. 更好的生育控制手段降低了人口增长率
- d. 技术的一次性永久进步增加了利用任何给定数量的资本和劳动能够生产的产出量

9.4 AK模型

$$Y = AK$$
$$\Delta K = sY - \delta K$$
$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{sY - \delta K}{K} = sA - \delta$$

显然，在有人口增长的AK模型中，稳态的资本变化率表示为：$\frac{\Delta K}{K} = sA - (n + \delta)$

- **与索洛模型相比**：AK模型最大的不同点就是通过抛弃边际产出递减的假设来获得持续增长的性质。换言之，AK模型依赖（线性生产函数赋予的）线性的资本积累。
- 索洛模型中储蓄的增长会暂时性地导致增长，也就是我们看到的图8-8,8-9那样的一个暂时效应，但资本收益递减会最终迫使经济达到稳态，资本积累速度最终减退为零；而AK模型中储蓄的改变，会持续性地增加资本积累，且不会减退。

AK模型的诟病及自圆其说

- **放弃资本收益递减的假说合理吗**？
- 答案取决于如何定义资本：
  - 如果K只包括经济中的物质资本，那么放弃资本收益递减确实不合理
  - 如果K包括物质资本和人力（知识）资本，那就合理多了。这一点在接下来与两部门模型的比较中得到了呼应。

9.4 两部门模型

$$Y = F[K,(1-u)EL]$$（制造业企业的生产函数）

$$\Delta E = g(u)E$$（研究型大学的生产函数）

$$\Delta K = sY - \delta K$$（资本的积累）

- 与索洛模型相似：
  - 制造业的生产函数仍然是规模报酬不变，例：$Y = K^{a}[(1-u)(EL)]^{(1-a)}$
  - 只是把外生的g改成内生的g(u)了。
  - 如果u保持不变，那么g(u)保持不变，劳动效率E就按照不变的比率g(u)增长——等同于有技术进步的索洛模型。
  - 也就是，对于任一u值，两部门模型就是一个索洛模型。
- 与AK模型相似：
  - 若把资本广义地定义为包括知识在内，这个经济就表现出资本收益不变，例如：
  - $Y = \left[(1-u)\tilde{K}\right]$

练习题：

假设一个含有两部门的经济体，产品部门的生产函数为：$Y = K^{0.5}[(1-u)EL]^{0.5}$；研发部门的生产函数为：$\Delta E = 2uE$；资本折旧率为0.03，人口增长率为0.01，储蓄率为0.2，研发部门人员的比重为0.05。

- （1）在这个经济体中，稳态时的有效人均资本存量是多少？人均产出增长率是多少？
- （2）画图分析当研发部门人员比重上升到0.1时稳态的变化，并计算此时稳态时的有效人均资本存量是多少？人均产出增长率是多少？

（1）

- 通过前面学习的增长模型的特征，我们知道，在有人口增长和技术增长的经济中，人均产出的增长率为g。题干给出：$\Delta E = 2uE$，其中$g = 2u = 2\times0.05 = 0.1$ （人均产出增长率！）

注：课本中给出的表达形式为$\Delta E = g(u)E$

- 人均生产函数为$y = k^{0.5}(1-u)^{0.5}$。
- 稳态条件为：$sf(k) = (\delta + n + g)k$；带入参数可得：$0.2\times k^{0.5}(1-0.05)^{0.5} = (0.03 + 0.01 + 0.1)k$；可解出$k = 1.94$,

（2）

- 生产函数曲线下移，折旧曲线上移
- 人均产出增长率: $g = 2u = 2\times0.1 = 0.2$
- 采用同样的计算方法可得$k = 0.62$